Friedrich Riesz

22. 1. 1880–28. 2. 1956

Am 28. Februar 1956 starb in Budapest an einer Embolie unser korrespondierendes Mitglied Friedrich Riesz. Geboren zu Raab (Györ) am 22. Januar 1880 als Sohn eines Arztes, studierte er in Budapest, Zürich (Technische Hochschule) und Göttingen. Nach seiner Promotion (Budapest, Universität, 1902) war er Gymnasiallehrer in Leutschen (Löcse) und Budapest. Im Jahre 1911 wurde er als Professor an die Universität Klausenburg (Kolozsvár) berufen und 1920 nach Szeged. Hier hat Riesz zusammen mit seinem früh verstorbenen Kollegen Alfred Haar die Zeitschrift „Acta Scientiarum Mathematicarum" ins Leben gerufen und sie alsbald zu internationaler Geltung gebracht. Zweimal hat er in Szeged die Bürde des Rektorates übernommen; das zweitemal im Frühjahr 1945, also zu einer Zeit, in der dieses Amt ein besonders verantwortungsvolles war. Im Jahre 1946 folgte Riesz einem Ruf an die Universität Budapest, wo er noch bis wenige Monate vor seinem Tode Vorlesungen hielt. Ein Bruder von ihm ist der ebenfalls sehr bekannte Mathematiker Marcel Riesz in Lund.

Nach seiner Dissertation, die von Punktkonfigurationen auf Raumkurven 4. Ordnung vom Geschlecht 1 handelte, wandte sich Riesz alsbald anderen Fragen zu. Hier mögen zunächst seine grundlegenden Untersuchungen zur Theorie der topologischen Räume genannt werden. Riesz gab nämlich als erster eine (vom

Häufungspunkt als Grundbegriff ausgehende) axiomatische Definition der heute so genannten T_1-Räume, einer wichtigen Klasse topologischer Räume. Damit wurde Riesz einer der Initiatoren in einem der wichtigsten Zweige der modernen Mathematik, nämlich der allgemeinen (mengentheoretischen) Topologie.

Etwa zur gleichen Zeit veröffentlichte er eine Entdeckung, die seinen Namen sofort bekannt machte; wir meinen den sogenannten Riesz-Fischerschen Satz. Dieser besagt: Sind die $a_1, a_2, \ldots$ reelle Zahlen, so konvergiert die Reihe $a_2^1 + a_2^2 + \ldots$ genau dann, wenn eine reelle Funktion f der reellen Veränderlichen x (im Intervall J) existiert, die im Sinne von Lebesgue quadratisch summierbar ist (in J) und deren Fourierkoeffizienten eben jene a_1, a_2, ... sind. Dieses Theorem gilt allgemeiner für den Fall, daß an Stelle des trigonometrischen ein beliebiges orthonormales System von quadratisch summierbaren Funktionen tritt, und besagt geometrisch gesprochen: Jede Folge von abzählbar vielen Zahlen a_n mit konvergenter Quadratsumme kann gedeutet werden als System der orthogonalen Projektionen (Koordinaten) eines Vektors im Hilbertschen Raum auf die Achsen eines (beliebigen) orthogonalen Koordinatensystems und umgekehrt. Als ein Beispiel der zahlreichen Anwendungen dieses wichtigen Satzes sei nur erwähnt, daß mit Hilfe des Riesz-Fischerschen Satzes der Nachweis gelingt für die Äquivalenz der Quantenmechanik von Heisenberg und der von Schrödinger.

Mit dieser Entdeckung und weiteren anschließenden Arbeiten erweist sich Riesz als einer der ersten, der die nur wenige Jahre zuvor von Lebesgue geschaffene neue Integraltheorie in ihrer Tragweite erkannte und sie für die Behandlung grundlegender Fragen nutzbar zu machen verstand. Riesz ist auch späterhin des öfteren auf Probleme der Lebesgueschen Theorie zurückgekommen, sei es daß er diese Theorie weiterführte, sei es daß er schon Bekanntes einfacher und durchsichtiger darzustellen wußte. Hierher gehören etwa neue Definitionen des klassischen Lebesgueschen und Riemannschen Integrals sowie insbesondere sein so überaus einfacher, völlig elementarer Beweis des bekannten Satzes, demzufolge jede reelle monotone endliche Funktion (und demnach auch jede Funktion von beschränkter Variation) einer reellen Veränderlichen fast überall eine endliche Ableitung besitzt.

Der Riesz-Fischersche Satz hat Beziehungen zu einem Fragenkreis, mit dem Riesz sich in jenen Jahren und auch später beschäftigte und den er gleichfalls durch wichtige Beiträge bereichert hat; es ist dies die Theorie der unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten und – damit zusammenhängend – der quadratischen und bilinearen Formen in unendlich vielen Variablen bzw. der Integralgleichungen. Von Riesz erschien dann bald auch die erste zusammenfassende Darstellung dieses damals viel bearbeiteten wichtigen Problemkreises: eine Darstellung, die zugleich neue Gesichtspunkte und Methoden zur Geltung bringt und die ebenso klar wie elegant geschrieben ist. In diesem Zusammenhang darf auch seiner Arbeiten über das sogenannte Momentenproblem gedacht werden.

Bei seiner Beschäftigung mit den soeben erwähnten Fragen ist Riesz schließlich zu einem Gebiet geführt worden, dessen außerordentliche Bedeutung sich insbesondere in den letzten Jahrzehnten immer deutlicher gezeigt hat, nämlich zur Theorie der linearen Funktionale oder vielmehr – allgemeiner – zur Funktionalanalysis; genauer gesagt zur Theorie der normierten (noch allgemeiner der topologischen) Vektorräume. Auch hier zog Riesz gleich zu Beginn seiner einschlägigen Untersuchungen die Aufmerksamkeit der mathematischen Welt auf sich. Er entdeckte und bewies nämlich den folgenden schönen Satz: Wir bezeichnen mit C den Banachraum der im Intervall $J = (a \leq x \leq b)$ reellen, stetigen Funktionen f von x mit der Norm $\|f\| = Max\,(|f(x)|; x \in J)$; weiter bezeichnen wir mit $L(f)$ ein lineares Funktional über C, das stetig ist in bezug auf die durch die Norm in C bestimmte Topologie. Dann ist (nach Riesz) jedes solche $L(f)$ darstellbar als ein Stieltjesintegral, also als $L(f) = \int_a^b f\,d\varphi$, wobei $\varphi\,(x)$ von (beschränkter Variation und von) f unabhängig ist. Umgekehrt liefert natürlich jedes solche φ vermittelst des zugehörigen Stieltjesintegrals ein über C stetiges Funktional. Dieser Satz kann in gewissem Sinne auch als Wegbereiter für die moderne, von Bourbaki vertretene, Auffassung der Maßtheorie angesehen werden, derzufolge unter einem Maß ein lineares Funktional bzw. eine Linearform zu verstehen ist (und erst in zweiter Linie eine Mengenfunktion).

Riesz hat in die Entwicklung der Funktionalanalysis immer wieder mit richtunggebenden Beiträgen eingegriffen. Und erst wenige Jahre vor seinem Tode hat er zusammen mit B. Sz.-Nagy eine glänzende, inzwischen schon in mehrere Sprachen, darunter auch ins Deutsche, übersetzte Darstellung des gegenwärtigen Standes wichtigster Teile der Funktionalanalysis gegeben. Unter seinen, in diesen Zusammenhang gehörigen Leistungen sei an dieser Stelle hervorgehoben die Einführung algebraischer, genauer verbandstheoretischer Gesichtspunkte in diese Theorie. So haben etwa Zerlegungssätze in der Theorie der linearen Funktionaloperationen algebraischen Charakter; beispielsweise läßt sich die bekannte Lebesguesche Zerlegung einer beliebigen σ-additiven (reellen) Funktion in einen bezüglich eines Maßes regulären und singulären Teil deuten als direkte ordnungstreue Zerlegung eines vollständigen Vektorverbandes oder, wie man heute sagt, eines Riesz'schen Raumes. Mit diesen Erkenntnissen hat Riesz auch hier wieder eine Entwicklung eingeleitet, die sich als äußerst weittragend erweist. Dahin gehören auch seine Untersuchungen über die Räume L^p, d. h. die Räume von meßbaren Funktionen f, für die $|f|^p$ summierbar ist $(1 \leq p)$; sie sind wichtige Bausteine zur Theorie der allgemeinen Banachschen Räume.

Ein Gebiet, das ebenfalls von Riesz erschlossen wurde, ist schließlich die Theorie der subharmonischen Funktionen. Diese verhalten sich zu den harmonischen analog etwa wie die konvexen (stetigen) Funktionen (einer Variablen) zu den linearen; erstere sind nämlich „sublinear" im folgenden Sinne: Ist $l(x)$ linear, $k(x)$ konvex und ist $l(x') \geq k(x')$ sowie $l(x'') \geqq k(x'')$, so gilt $l(x) \geq k(x)$ für jedes x zwischen x' und x''. Entsprechend heißt $u(x, y)$ subharmonisch (in einem Gebiet G), wenn u oberhalbstetig sowie nicht identisch $-\infty$ ist und wenn für jede, in einem Teilbereich B von G stetige, harmonische Funktion $h(x, y)$ die Ungleichung $h(x, y) \geq u(x, y)$ für jedes $(x, y) \in B$ gilt, falls diese Ungleichung nur für alle (x, y) aus der Begrenzung von B erfüllt ist. Die Theorie dieser subharmonischen Funktionen, deren Grundlagen übrigens schon von Riesz selbst geschaffen wurden, hat alsbald das Interesse zahlreicher Mathematiker auf sich gezogen und sich als äußerst fruchtbar für die Potentialtheorie erwiesen.

Vieles andere können wir hier nicht näher besprechen, so etwa seine Beiträge zur Ergodentheorie. Aber schon das bisher Angedeutete zeigt, daß wir in Friedrich Riesz einen der hervorragendsten zeitgenössischen Mathematiker verloren haben. Bei einem weitgespannten Kreis von Interessen besaß er einen untrüglichen Blick für zukunftsträchtige Probleme und für das jeweils Wesentliche eines Fragenkreises. An äußeren Anerkennungen hat es ihm daher auch nicht gefehlt: Er war Mitglied verschiedener Akademien und unter anderem Doctor honoris causa der Universität Paris.

Otto Haupt